CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - Coefficient : 7)

---==oOOo==---

TEXTE

1°) Les trois problèmes sont indépendants et peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

2°) Dans les trois problèmes, le corps de base est celui des nombres réels. Toutefois, à la question 3°) du problème II, les candidats auront intérêt à utiliser les nombres complexes pour résoudre un problème de sommation trigonométrique.

3°) La notation Lnx désigne le logarithme népérien de x ; e désigne la base des mêmes logarithmes.

4°) E(x) désigne la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant la double inégalité :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

x

x x

PROBLEME I

1°) n désignant un entier strictement positif, on pose :

$$a_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}}$$

$$b_n = \text{Ln}\, a_n$$

$$t_n = b_{n+1} - b_n$$

Etudier la nature de la série de terme général t_n.

Déduire de ce qui précède l'existence d'un réel strictement positif h (dont le calcul n'est pas demandé aux candidats) tel que l'on ait l'équivalence :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} h.n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}$$

2°) On pose, n étant ici un entier positif ou nul :

$$u_n = \text{Ln}\left[1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right]$$

Etudier (le plus simplement possible) la convergence de la série de terme général : u_n

3°) On se propose ici de calculer la somme de la série précédente, c'est-à-dire :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Posons, si k est un entier positif ou nul :

$$v_k = u_{2k} + u_{2k+1}$$

$$S_k = \sum_{m=0}^{m=k-1} v_m$$

Quel est le signe de v_k ?

Donner de S_k une expression faisant intervenir diverses factorielles.

A l'aide de cette expression, calculer S.

PROBLEME II

1°) a et b étant deux réels tels que $a < b$, soit f une application de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, λ étant un réel :

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)\cos \lambda x \, dx \ ,$$

$$J(\lambda) = \int_a^b f(x)\sin \lambda x \, dx$$

Montrer que $I(\lambda)$ et $J(\lambda)$ ont une limite nulle lorsque λ tend vers $+\infty$.

2°) Déterminer deux réels fixes u,v tels que, quel que soit l'entier strictement positif n, on ait l'égalité :

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} (ux + vx^2) \cos nx \, dx$$

3°) On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

A l'aide de la question précédente, exprimer S_n sous forme d'intégrale.

Calculer (par exemple en utilisant l'exponentielle complexe) une expression simple de :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \cos kx \ .$$

En introduisant une fonction f convenablement choisie, et appliquant le résultat de la question 1°), déterminer $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.

Les candidats sont invités à vérifier très soigneusement que la fonction f introduite est bien de classe C^1 sur $\left[0, \pi\right]$.

4°) Déterminer tous les entiers strictement positifs n possédant la propriété suivante :

(P_2) "$E(\sqrt{n})$ divise n"

Il sera commode de poser $E(\sqrt{n}) = k$

On appelle U_2 l'ensemble des entiers ayant la propriété (P_2).

5°) Montrer que la série :

$$\sum_{n \in U_2} \frac{1}{n}$$

est convergente.

On appelle $\sum_2$ la somme de cette série. Calculer $\sum_2$ (le résultat s'exprime simplement à l'aide de π).

PROBLEME III

Le plan euclidien de la géométrie usuelle est rapporté à un repère orthonormé Ox, Oy.

On étudie dans cet exercice l'ensemble (C) des points du plan dont les coordonnées vérifient les conditions suivantes :

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \quad , \quad x \neq y \quad \text{et} \quad x^x = y^y$$

1°) Vérifier, à l'aide par exemple du point de coordonnées $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ que (C) est non-vide.

2°) On appelle (D_t) la droite d'équation $y = tx$, où t est un réel appartenant à :

$$\left]0,1\right[\ \cup \ \left]1, +\infty\right[\ .$$

Etudier l'intersection de (D_t) et de (C). En déduire une représentation paramétrique de (C) de la forme :

$$x = u(t), \quad y = v(t)$$

où u et v sont des applications de $\left]0,1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$, que l'on précisera.

On appelle M(t) le point de coordonnées $\Big(u(t), v(t)\Big)$.

Déterminer :

- $\lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t > 0}} M(t)$
- $\lim_{t \longrightarrow 1} M(t)$
- $\lim_{t \longrightarrow +\infty} M(t)$

.../...

3°) On pose dans ce qui suit $(\bar{C}) = (C) \cup \{P, Q, R\}$, où :

P est le point de coordonnées (1, 0) ;

Q est le point de coordonnées (0, 1) ;

R est le point de coordonnées $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$;

et on se propose de construire $(\bar{C})$.

Quelle est la position relative des points M(t) et M $(\frac{1}{t})$?

Qu'en déduit-on pour $(\bar{C})$?

Etudier les variations de u(t) et v(t).

Préciser les tangentes à $(\bar{C})$ en P, Q, R.

Donner l'allure de $(\bar{C})$.

4°) On pose, si $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $m(t) = \frac{v'(t)}{u'(t)}$

Calculer m(t), puis m'(t) dont on étudiera le signe.

En déduire le sens de concavité de $(\bar{C})$.

5°) Démontrer que les fonctions u et v définies à la question 2°) sont susceptibles d'être prolongées par des fonctions $\bar{u}$ et $\bar{v}$ de classe C^∞ sur tout l'intervalle $]0, +\infty[$ (On posera $\bar{u}(1) = \bar{v}(1) = \frac{1}{e}$).

-----=oOOo=----